

اسم الطالب :
 الدرجة : 100
 المدة : 90 دقيقة

امتحان مقرر الدوال محدودة التغير
 الفصل الثاني للعام 2014/ 2015
 السنة الثالثة - رياضيات

جامعة البعث
 كلية العلوم
 قسم الرياضيات

السؤال الأول (35 درجة): (أ) إذا كانت f دالة تحقق شرط ليبشترز على $[a, b]$ ، فاثبت أنها تكون مستمرة مطلقاً عليها، ثم حقق ذلك من أجل الدالة: $f(x) = |x|$ على $[-2, 2]$ و هل هي قيوسة عليها و لماذا؟.

(ب) بين أن مجموع قفزات الدالة:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & ; 0 \leq x \leq 2 \\ x+3 & ; 2 < x < 5 \\ 9 & ; 5 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

في نقاط انقطاعها الداخلية على هذه الفترة أقل أو يساوي الفرق: $\varphi(6) - \varphi(0)$.
- ادرس محدودية التغير لهذه الدالة و كموليبتها ريمانياً على $[0, 6]$ و ما هو قياس مجموعة نقاط انقطاعها لوبيغياً و لماذا؟
(ت) - تأكد من وجود تكامل ستيلجس للدالة: $g(x) = x^2$ بالنسبة ل φ الموجودة في الطلب (ب) ثم احسب قيمته في حال وجوده (أي $\int g d\varphi = (S) J$).

السؤال الثاني (30 درجة): (أ) - إذا كانت الدالة h مستمرة تقريباً في كل مكان على الفترة $[a, b]$ ، فناقش كموليبتها لوبيغياً على هذه الفترة، و متى تكون الدالة العقدية ذات م على فترة حقيقية $[a, b]$.

(ب) أوجد دالة التغير للدالة: $f(x) = \sqrt{x}$ على الفترة $[1, 5]$ مع تغيرها الكلي عليها، و ماذا بشأن استمرار دالة التغير الناتجة عند النقطة $x = 1$ ، و نوع إطراد الدالة $v_f(x) - f(x)$

(ت) يتعين المجموعة $E(\psi > c)$ ، أثبت أن الدالة: $\psi(x) = \begin{cases} 0 & ; x = 0 \\ \frac{1}{x^2} & ; x \neq 0 \end{cases}$

قيوسة على الفترة $[-1, 1]$ حيث C أي عدد حقيقي.

السؤال الثالث (35 درجة): (أ) - اكتب صيغة الدالة المميزة على الفترة $[0, 1]$ ، ثم ناقش وجود تكامل ليبيغ لها من عدمه على نفس الفترة، و أحسبه في حال وجوده.

- عبر عن تكامل ستيلجس المعتل التالي: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} d[x]$ على شكل متسلسلة عددية لانهاية مع دراسة تقارب هذا التكامل أو تباعده (حيث $[x]$ دالة الصحيح).

(ب) لو أخذنا المجموعة $X = \{1, 2, 3, 4\}$ و الصف $S = \{\Phi, X, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ و المطلوب: بين أن S تبولوجيا على X و هل هو جبر، جبر تام؟ مع ذكر السبب.

- لنضع $\mu^*(E) = \sqrt{|E|}$ حيث $E \subseteq X$ و $|E|$ تمثل عدد عناصر هذه المجموعة،

والمطلوب: بين أن μ^* هذا قياساً خارجياً على X و ليس قياساً (X نفس المجموعة أعلاه).

(ت) إذا كان μ قياساً منتهياً على جبر تام ما S_1 ، فناقش صحة المساواة:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) ; E_n = \left[-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right], n \geq 1$$

مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح

مدرس المقرر: د. محمد عامر

رئيس الأسس

حضر في 2015/6/29

c < 0
c = 0
c > 0

(تمنع الآلة الحاسبة)

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقتك

السؤال الأول (33 د): (أ) - بين فيما إذا كانت دالة ديريكليه ذات م على الفترة $[5, \sqrt{2}]$ وما هو تغيرها الكلي،

ثم أنها تساوي الصفر تقريباً في كل مكان على نفس الفترة ، و هل يمكن أن تكون مستمرة مطلقاً عليها ؟ مع ذكر السبب .

(ب) - ناقش مع التوضيح ، فيما إذا كانت دالة الجزء الصحيح اشتقاقية على الفترة $[0,9]$ - مستمرة تقريباً في كل مكان و

القيومية لها على تلك الفترة.

- ابحث في إمكانية أن يكون صف المجموعات المفتوحة جبر تام - جبر مع ذكر قياس $\lambda(Q)$ مع التعليل ؟ .

(ج) - أوضح أن الدالة $y = \sqrt{x}$ مستمرة مطلقاً حسب التعريف على الفترة $[0,1]$ ، ثم علل هل يلزم أن يكون مشتقها محدوداً

عليها إذا كانت ذات م ، وما هو تغيرها الكلي .

السؤال الثاني (34 د): (أ) - إذا كانت الدالة f ذات م و قيومية على $[a,b]$ ، فأثبت أن الدالة f^2 قيومية وذات م

على تلك الفترة حسب التعريف للمفهومين ، ثم اكتب صيغة دالة التعبير لها على نفس الفترة مع ذكر خاصيتين لهذه الدالة .

(ب) - بين أن الدالة المميزة للمجموعة $A \subseteq E$ قيومية على E إذا كانت A مقيسة ، ثم احسب تكامل ليبينغ لها على الفترة

$[0,1]$ بعد التأكد من وجوده .

(ت) - عط مثلاً على دالة f ذات م و g دالة متزايدة على فترة مثل $[a,b]$ ، بحيث أن الدالة $|f|$ كمولة حسب مفهوم ستيلجس

بالنسبة لـ g ، بينما التكامل $\int_a^b f dg$ غير موجود على هذه الفترة .

- احسب قيمة تكامل ستيلجس التالي : $K = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ علماً أنه موجود .

السؤال الثالث (33 د): (أ) - بين أن الدوال التالية (وعلى كل فترة تقابلها) :

$$x \in]0,1[\quad \text{حيث} \quad f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n!(1+x)^{-n} \quad , \quad f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \quad , \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

قيومية ، ثم بين أن f_2 دالة تحقق شرط ليبشيز و أنها محدودة تقريباً في كل مكان عليها .

(ب) - إذا كانت $X = \mathbb{N}$ والدالة $\mu(A) = \sum_{x \in A} \frac{1}{n}$ حيث $A \in P(\mathbb{N})$ و $\mu(\emptyset) = 0$ و $\alpha_n = \frac{1}{n}$ متتالية حقيقية ، و المطلوب :

1- بين أن الدالة μ قياس على $P(\mathbb{N})$ ، وهل هو منته أم لا ؟ ولماذا ؟ .

2- احسب قياسات المجموعات : \mathbb{N} ، $\{2,8,32\}$ ، $\{25\}$ وفق μ .

- إذا كانت f دالة قيومية على E ، فأثبت أن كلا من المجموعتين : $\{x \in E : f(x) = \infty\}$ ، $\{x \in E : f(x) = -\infty\}$ تكون مقيسة ، ثم علل بمثال فيما إذا كانت كل مجموعة مقيسة حسب ليبينغ يجب أن تكون محدودة و عدودة .

انتهت الأسئلة

حمص في 2014/2/12

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح مدرس المقرر د. محمد عامر



الاسم :
 الدرجة : 100
 المدة : ساعتان

امتحانات الدورة الإضافية للعام 2012/2013
 مقرر الدوال محدودة التغير
 لطلاب السنة الثالثة - رياضيات

الجمهورية العربية السورية
 وزارة التعليم العالي - جامعة البعث
 كلية العلوم - قسم الرياضيات

السؤال الأول (50)

- (أ) إذا كانت الدالة g ذات م على الفترة $[a, b]$ (حيث a, b حقيقيان ومحدودان)، فأثبت أن الدالة $f(x) = \sin(g(x))$ ذات م على نفس الفترة، طبعاً باستخدام التعريف.
- (ب) اعتماداً على فكرة تكاملي ستيلجس الأعلى والأدنى على الترتيب للدالة f بالنسبة للدالة g على الفترة $[a, b]$ ، والمطلوب: بين فيما إذا كانت دالة ديريكليه φ المعطاة على الفترة $[\sqrt{2}, 4]$ كمولة أم لا بالنسبة للدالة $g(x) = x + 5$ على نفس الفترة؟ مع التعليل؟

- لتكن الآن الدالة: $x \in [\sqrt{2}, 4]$; $F(x) = (8 - x^2)[1 - \varphi(x)]$ حيث φ دالة ديريكليه السابقة. يطلب منك:

1. إثبات أن F دالة قيوسة بعد إثبات أن φ قيوسة على نفس الفترة المفروضة.

2. أوضح هل الدالة F محدودة تقريباً في كل مكان على $[\sqrt{2}, 4]$ ؟ ولماذا؟

(ت) بين من أجل المتتالية $\alpha_n = \left[-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right]$ ، أنه تصح المساواة التالية:

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \alpha_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(\alpha_n))$$

مع أن μ قياس منتبه على الجبر التام S .

(ث) هل المجموعة:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[7n, 7n + \frac{1}{\ln n}\right] - Q$$

مقيسة أي كانت $n \geq 1$ ، وفي حالة الإيجاب، ما هو قياسها $\lambda(A)$ ، ثم أضف، أوجد $\lambda(R)$ ، $\lambda(\{-2\})$ ، $\lambda([0, 1])$.

- (ج) إذا كانت الدالة f معرفة على المجموعة E ذات القياس المعدوم (حسب ليبينغ)، فأثبت أن هذه الدالة قيوسة عليها. ثم إذا كانت E و F مقيستان، فهل $E \Delta F$ مقيسة؟ مع توضيح السبب!

السؤال الثاني (50)

- (1) اكتب نص المبرهنة الخاصة بحساب تكامل ستيلجس وذلك في حال كانت f مستمرة و g تأخذ قيمة ثابتة على $[a, b]$.
- (2) إذا كانت $f \in C_{[0,1]}$ فضاء الدوال المستمرة على $[0, 1]$ ، كما نعلم ليس بالضرورة أن تكون دالة ما من هذا الصف ذات م على $[0, 1]$ ، فبين ذلك بمثال توضيحي من عندك مع الإثبات وما هو التغير الكلي لهذه الدالة على نفس الفترة، وكتابة الواجب إضافته لتكون الدالة المطردة بتزايد على R ذات م عليها.
- (3) لتكن μ قياس على الجبر التام S ، ولتكن $A \in S$ مجموعة ما مثبتة، وأضف أن $0 < \mu(A) < \infty$ ، ولنضع من أجل $A \in S$ العلاقة:

$$\delta(B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)} ; B \in S$$

بين فيما إذا كانت δ المعرفة بهذه العلاقة تشكل قياساً على S ، وهل هو منته - σ - منته؟ مع التعليل؟

(4) بعد التأكد من وجود تكامل ستيلجس التالي:

$$J = \int_1^3 f(x) d h(x)$$

حيث:

$$f(x) = x^2, \quad h(x) = \begin{cases} x+1 & ; 1 \leq x < 2 \\ 6 & ; x = 2 \\ x^2 & ; 2 < x < 3 \\ 19 & ; x = 3 \end{cases}$$

ثم أحسب قيمته بعدئذ.

- (5) علل، فيما إذا كانت الدالة $\psi(x) = x^2 + 10$ تحقق شرط ليبشيتز على الفترة $[2, 5]$ ، وهل يمكن لدالة الصحيح أن تكون مستمرة مطلقاً - ذات م على الفترة $[0, 10]$ وأحسب تغيرها الكلي على هذه الفترة؟

أستاذ المقرر
 محمد عامر

انتهت الأسئلة
 مع تمنياتي لكم بالتوفيق

حمص في 2013/08/27م

أجب عن السؤالين التاليين :

السؤال الأول (50 درجة) :

- (أ) إذا كان للدالة f مشتقاً موجباً ومحدوداً على الفترة $[a, b]$ ، فأثبت أن هذه الدالة تكون ذات م ومتزايدة أيضاً على هذه الفترة.
 (ب) أكمل النتيجة القائلة ((بفرض أن f دالة اشتقاقية على $[a, b]$ - ربما باستثناء عدد محدود من نقاط هذه الفترة)) وما هي عبارة التغير الكلي هنا للدالة f .

- طبق ذلك من أجل الدالة $f(x) = \sin x$ على الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$ مع حساب تغيرها الكلي على هذه الفترة.
 (ت) إذا كانت الدالتان f و g حيث الأولى f مستمرة والثانية g مستمرة وذات م على الفترة $[a, b]$ ، فأثبت أن الدالة :

$$F(x) = \int_a^x f(u) dg(u) \quad ; x \in [a, b], F(a) = 0$$

ذات م على $[a, b]$ ، ثم أنها قيوسة على تلك الفترة.

(ث) اختر تجزئة مناسبة للفترة $[0, 2]$ ، بحيث تكون الدالة :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x = 0 \\ x^2 \sin \frac{\pi}{x^2} & ; 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

ليست ذات م على هذه الفترة بدون حل ، وهل يمكن أن تكون هذه الدالة مستمرة مطلقاً ومنحنيها قابل للتقويم على $[0, 2]$ ؟ مع التعليل ؟

- اقترح تعديلاً لتصبح الدالة المفروضة ذات م على الفترة المذكورة (أيضاً دون ذكر حل).

(ج) اذكر دالتان متزايدتان ومحدودتان على فترة مغلقة ومحدودة بحيث يكون الفرق بينهما دالة ذات م عليها ، وما هي مجموعة نقاط انقطاعها ، وما هو قياسها حسب ليبينغ ؟ ولماذا ؟

السؤال الثاني (50 درجة) :

(1) تأكد من وجود تكامل ستيلجس التالي :

$$J = \int_0^3 \arctan x \, d(8x)$$

وفي حال وجوده ، احسب قيمته عندئذ.

(2) اكتب صيغة الدالة λ^* (قاعدة الربط) مع ذكر كل الشروط التي تكون معها هذه الدالة قياساً خارجياً على مجموعة تعريفها ، ثم أثبت صحة أول شرطين فقط من هذه الشروط.

(3) متى نقول عن قياس أنه منتبه ، σ -منتبه - ثم وضع أن قياس ليبينغ λ في المجموعة R هو σ -منتبه من أجل المجموعات :

$$E_n = [-n, -n+1[\cup [n-1, n[\quad ; n = 1, 2, \dots$$

(4) - ليكن لدينا صف المجموعات وحيدة العنصر : $\mathcal{A} = \{ \{x\} ; x \in R \}$ والمطلوب :

هل هذا الصف جبراً ؟ ولماذا ؟ علماً أنه تبولوجيا وما العلاقة بين الجبر والتبولوجيا ؟

بيّن أن كل مجموعة وحيدة العنصر مثل $\{y\}$ في R هي بوريلية ، وهل هي لوبيغية ؟ وما هو قياسها في هذه الحالة ؟
 (5) بيّن فيما إذا كانت المجموعة :

$$I = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ x ; \frac{1}{k+1} \leq x < \frac{1}{k} \right\}$$

مقيسة حسب مفهوم ليبينغ ، وما هو قياسها إن كانت مقيسة ؟ مع أن مجموعاتها منفصلة مثلي مثلي.

مع مراعاة ترتيب ورقتك أجب عن الأسئلة التالية:

السؤال الأول:

(1) إذا كانت g دالة كمولة ريمانياً على الفترة المغلقة والمحدودة $[a, b]$ ، فأوضح فيما إذا كانت الدالة G والمعروفة بالشكل:

$G(x) = c + \int_a^x g(t)dt ; x \in [a, b]$ مستمرة مطلقاً على هذه الفترة أم لا؟ مع ذكر السبب. (حيث c ثابت حقيقي مغاير للصفر).

(2) أثبت أن الدالة $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ تحقق شرط ليبنتز على الفترة $[1, 5]$ ثم علل بكلمات فيما إذا كانت f ذات مقيوسة ومستمرة بانتظام على تلك الفترة.

(3) تحقق من أن متتالية الدوال: $\varphi_n(x) = (1-x)^n$ متقاربة تقريباً في كل مكان على الفترة $[0, 1]$ من دالة يُطلب ذكرها هنا، وهل هي متقاربة من تلك الدالة بالقياس مع ذكر هل العكس صحيح أم لا؟ على نفس الفترة ($n \geq 1$).

السؤال الثاني:

(1) إذا كانت f دالة ذات مقيوسة على $[a, b]$ ، فأثبت أن مربعها (f^2) يكون كذلك على تلك الفترة باستخدام التعريف لكل مفهوم على حدى.

(2) بين أن:

$$J = (s) \int_0^\infty e^{-x} d[x] = \frac{1}{e-1}$$

علماً أن التكامل موجود على الفترة $[0, \infty]$ ، وهل الدالة الدرجية هنا مستمرة تقريباً في كل مكان على فترة مثل $[a, b]$ ؟ ولماذا؟ وما هو تغيّرها الكلي، أي الدالة الدرجية على $[a, b]$.

(3) بفرض أن: $X \neq \emptyset$ مجموعة ما، والمطلوب إثبات أن الصف $P(X)$ هو صف مطرد، وأن الصف m_μ جبراً تاماً على X حيث μ^* قياس خارجي على $P(X)$ ، وهل $\beta(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}$ بدون تعليل؟

السؤال الثالث:

(1) نعم إذا كان للدالة h مشتقاً h' محدوداً على $[a, b]$ فتكون ذات م عليها، أتكون هذه النتيجة صحيحة فيما لو لم يكن هذا المشتق موجوداً في عدد منته من نقاط $[a, b]$ ، بين ذلك بمثال من عندك.

(2) لتعرف على الجبر التام S على مجموعة ما X الدالة μ بالعلاقة: $\mu(E) = 0$ حيث $E \in S$ بفعل إذا كانت شروط القياس هنا محققة على S وهل هو منته أيضاً؟ ولماذا؟

- خذ المتتالية $F_n = [0, \frac{n+1}{n}]_{n \geq 1}$ ، فأوجد $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n$ ، وما هو قياس ليبينغ لها؟

(3) ليكن المشتق المستمر f' للدالة f على $[a, b]$ والمطلوب إثبات أن:

$$\sum_{n=[a]+1}^{[b]} f(n) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f'(x)((x)) dx + f(a)((a)) - f(b)((b))$$

حيث: $((x)) = x - [x]$ ، مع أن التكاملات جميعها موجودة، ثم انظر ماذا تستنتج عندئذ.

محس في 2013/1/17 م

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

أستاذ المقرر
د. محمد عامر

على
الترتيب
2 و 1

ما. حکمہ عامر

الاسم : محمد عبد الله
المدة : ٢ س
الدرجة : ١٠٠

امتحان الفصل الأول للعام 2011
2012
لمقرر الدوال محدودة التغير
المسنة الثالثة - رياضيات

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

(تمنع الحاسبات)

أجب عن الاسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في اجابتك :

السؤال الأول : (30°)

١. إذا كانت الدالة f مطردة على الفترة $[a, b]$ فاثبت أنها ذات م مع ذكر تغيرها الكلي عليها ، وهل يمكن

للدالة $f(x) = e^x$ أن تكون ذات م على الفترة $[0, +\infty]$ مع التعليل ؟

٢. ليكن $\mu^*(E) = 0$ ، والمطلوب : اثبات أن المجموعة E تكون مقيسة بالنسبة للقياس الخارجي μ^* .

٣. أوجد دالة التغير للدالة : $h(x) = [x] + 9$ على الفترة $[1, 4]$ ، ثم بين أن $V_n^b (v_h(x)) = V_n^b (h)$

السؤال الثاني : (30°)

١. لتكن لدينا التجزئة $T_n = \{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \dots, \frac{1}{2}, 1\}$ للفترة المغلقة $[0, 1]$ ، والمطلوب :
بين باستخدام هذه التجزئة والتعريف فيما إذا كانت الدالة :

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{2x} : 0 < x \leq 1 \\ 0 : x = 0 \end{cases}$$

ذات م على $[0, 1]$ ، أم لا ؟ ولماذا ؟ وما هو تغيرها الكلي عندئذ ؟

٢. إذا كانت $\lambda(E) = 0$ ، فإن الدالة f المعرفة على E المقيسة تكون قيوسة عليها

٣. لتكن المجموعة $A \subset X$ (حيث $X \neq \emptyset$) فاككتب الجبر التام التي تولده هذه المجموعة ، وماذا نعني بقياس ليببغ λ ثم أوجد : $\lambda(\{0\})$ ، $\lambda([-1, 9])$ ، $\lambda(Q)$.

السؤال الثالث : (24°)

١. اكتب الدالة $g(x) = \arctan x$ على الفترة $[0, 1]$ على شكل تكامل بحدده الأعلى مع اثبات ان الدالة g ذات م على تلك الفترة ثم احسب تغيرها الكلي عندئذ .

٢. خذ الدالة g السابقة واحسب التكامل التالي : $J = (S) \int_0^1 \frac{x}{4} dg(x)$ بعد التأكد من وجوده .

السؤال الرابع : (16°)

١. بين أن الدالة ψ المعرفة على الفترة $[-1, 1]$ بالشكل :

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^4} ; x \neq 0 \\ 0 ; x = 0 \end{cases}$$

قيوسة على تلك الفترة

٢. اثبت أن كلا من مجموعة الأعداد العادية والغير عادية التي تنتمي إلى الفترة $[\sqrt{2}, 5]$ تكون مقيسة حسب مفهوم ليببغ واحسب قياس كل منها

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي لكم بالنجاح

استاذ المقرر محمد عامر

$$f(n) = c$$

$$\frac{1}{n^4} = c \Rightarrow n^4 = \frac{1}{c} \Rightarrow n = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{c}}$$

$$\frac{1}{n^4} = c \Rightarrow n^4 = \frac{1}{c} \Rightarrow n = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{c}}$$

$$\Rightarrow n = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{c}}$$

$$x^2 = \pm \sqrt{\frac{1}{c}}$$

الاسم: ر. د. د.
الرقم: ١٨٠٠٦
المدة: ساعتان

امتحان مقرر الدوال محدودة التغير
لطلاب السنة الثالثة رياضيات
الفصل الأول للعام 2010-2011

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقة الإجابة : (يمنع استخدام الآلات الحاسبة)

السؤال الأول (25 درجة):

(أ) أوجد دالة التغير للدالة: $h(x) = \cos' x$ على الفترة $[0, \pi]$ ، ثم بين أن الدالة $f(x) = |x|$ قيوسة على

نفس الفترة و احسب تكامل ستيلجس للدالة f بالنسبة لـ h على الفترة $[0, \pi]$ بعد التأكد من وجوده

(ب) إذا كانت $\mu^*(G) = 0$ ، حيث μ^* قياس خارجي على $P(X)$ ، فأثبت أن:

$$\mu^*(E \cup G) = \mu^*(E - G) = \mu^*(E)$$

حيث E مقيسة بالنسبة لـ μ^* و تنتمي إلى $P(X)$.

السؤال الثاني (25 درجة):

(أ) لتكن الدالتان: $g(x)$ و $f(y)$ حيث الأولى مستمرة مطلقا على الفترة $[a, b]$ و الثانية تحقق شرط ليبشتر

على الفترة $[\alpha, \beta]$ ، و أضف إلى هنا مجموعة قيم g محتواة في الفترة $[\alpha, \beta]$. و المطلوب: إثبات أن

تركيبهما $(f \circ g)$ دالة مستمرة مطلقا على $[a, b]$ باستخدام التعريف.

(ب) إذا كانت الدالتان

$$f(x) = \begin{cases} x & ; 0 \leq x < 1 \\ 2 & ; x = 1 \\ x+1 & ; 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad \text{و كذلك} \quad \varphi(x) = [x]$$

فهل تكامل ستيلجس f بالنسبة لـ φ موجود ؟ مع التعليل ؟ على الفترة $[0, 2]$.

السؤال الثالث (25 درجة):

(أ) وضح فيما إذا كانت دالة محدودة التغير على فترة $[a, b]$ هي قيوسة عليها ؟

(ب) أثبت أن أية دالة ثابتة قيوسة على المجموعة E المقيسة، ثم احسب تكامل ليبشتر لها على المجموعة

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{7n}, \frac{1}{7n} + \frac{1}{2^n} \right]$$

مثالا يدعم ذلك بدون حل.

(ت) بين أن الصف: \mathcal{M}_{μ} جبر تام على X ، حيث μ^* قياس خارجي على $P(X)$.

السؤال الرابع (25 درجة):

(أ) أثبت * إذا كانت الدالتان f مستمرة و g محدودة التغير على الفترة $[a, b]$ ، فإن التكامل $\int_a^b f dg$ يكون

موجودا

(ب) لتكن $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ متتالية من الدوال القيوسة على المجموعة E بحيث أن $f_n \xrightarrow{ae} f$ ، فإذا كان:

$$f_n \xrightarrow{ae} g \quad \text{و المطلوب: إثبات أن:} \quad f = g$$

مع تمنياتي لكم بالنجاح

انتهت الأسئلة

حسب في 17 / 1 / 2011

مدرس المقرر: د. محمد عامر

اجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقة الإجابة:

(تمنع الآلات الحاسبة)

السؤال الأول (١٠ درجة):

١- إذا كانت الدالة f ذات تغيرات محدودة على الفترة $[a, b]$ ، فاثبت أنه يلزم ويكفي أن توجد دالة $G(x)$ متزايدة ومحدودة على $[a, b]$ ونحقق العلاقة:

$$|f(x'') - f(x')| \leq G(x'') - G(x') ; a \leq x' < x'' \leq b$$

بد- احسب تكامل ستيلجس (علما أنه موجود): $J = (f) \int_0^1 \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ باستخدام طريقة تبديل المتغير.

ت- بين فيما إذا كانت الدالة: $h(x) = [x]$ مستمرة تقريبا في كل مكان على الفترة $[-1, 5]$ ، وهل هي قبوسة أم لا على هذه الفترة، ولماذا؟

ث- إذا كانت μ دالة مجموعات معرفة على $S = \mathcal{P}(X)$ حيث $X \neq \emptyset$ كما يلي: $\forall E \subseteq X \Rightarrow \mu(E) = 0$ ، فاثبت أن μ قياس على S وأنه متزايد، وهل هو منته أم لا؟ مع ذكر السبب.

السؤال الثاني (٣٠ درجة):

١- لتكن لدينا الدالة g المعرفة على الفترة $E = [0, 4]$ بالشكل:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & ; x \in [0, 4] - \mathbb{Z} \\ 0 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

والمطلوب: ١- هل g دالة قبوسة على $E = [0, 4]$ ؟ مع التعليل.

٢- بين أن الدالة $h(x) = x^2 - 3$ قبوسة على E ، ثم احسب قيمة تكامل ليبينج للدالة h على E بعد التأكد من وجوده.

ب- أثبت أن تقاطع أسرة من الجبرور النتامة غير الخالية على X هي من جديد جبر تام على X ، ثم اذكر صليين مولدين لجبر بوريل.

ت- اذكر مثالا لدالة مستمرة على فترة محدودة $[a, b]$ وليست ذات تغيرات محدودة عليها، مع إثبات ذلك.

السؤال الثالث (٣٠ درجة):

١- لتكن لدينا الدالة: $B(x) = cx + \int_0^x g(t) dt$ حيث g دالة كمولة ريمانيا على الفترة $[a, b]$ و c ثابت ما، فهل الدالة B

مستمرة مطلقا على الفترة $[a, b]$ باستخدام التعريف، وإذا كانت كذلك فهل هي كمولة لوبيفيا على تلك الفترة؟ ولماذا؟

بد- أوجد دالة التغير للدالة: $f(x) = \begin{cases} x & ; 0 \leq x < 1 \\ x^2 & ; 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$ على الفترة $[0, 3]$ ، ثم بين فيما إذا كانت الدالة $f - f_0$ ذات تغيرات

محدودة على نفس الفترة؟ مع التعليل.

ت- أثبت أن متتالية الدوال التي حدما العام: $f_n(x) = x^n$ ($n \geq 1$) متقاربة تقريبا في كل مكان من دالة يعطى تعيينها على الفترة $[0, 1]$ ، وهل دالة النهاية قبوسة على تلك الفترة؟ ولماذا؟

انتهت الأسئلة

حصى في ٢٠١١/٨/١٥

مدرس المقرر

د. محمد عامر

مع تمنياتي لكم بالنجاح

ول (٢٠ درجة): (أ) - لنكن f دالة مستمرة و B دالة محدودة التغير على الفترة $[a, b]$ ، وانضع

$$F(x) = \int_a^x f(t) dg(t) ; x \in [a, b]$$

أثبت أن الدالة F محدودة التغير على الفترة $[a, b]$.

إذا كانت الدالة B مستمرة في النقطة $x = x_0$ ، فبين أن الدالة F تكون كذلك.

أذكر مثلاً عن دالة تحقق شرط ليبشتر على فترة مغلقة ومحدودة، بحيث تكون فيه مستمرة مطلقاً وقابلة للمكاملة لوبيتيا الفترة، مع ذكر الحل فقط لتحقق الشرط على الفترة المذكورة.

ثاني (٢٠ درجة): (أ) - لنكن لدينا الدالة:

$$\psi(x) = \begin{cases} x^2 & ; 0 \leq x < 1 \\ 5 & ; x = 1 \\ x + 3 & ; 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

اكتب هذه الدالة على شكل فرق دالتين متزايدتين على الفترة $[0, 2]$.

إذا كانت $f_1(x) = e^x$ معرفة على $[0, 2]$ ، فأحسب قيمة التكامل $\int_0^2 f_1(x) d\psi(x)$ بعد التأكد من وجوده.

إذا كانت الدالة f مستمرة تقريباً في كل مكان على المجموعة E ، فإن f تكون قابلية على E .

ثالث (٢٠ درجة): (أ) - لنكن f دالة حقيقية معرفة على الفترة $[0, 1]$ بالشكل:

$$f(x) = 0 ; x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] ; f(x) = \frac{1}{2} ; x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] ; f(x) = \frac{3}{4} ; x \in \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right] ; \dots ; f(x) = 1$$

بيّنه الدالة المتزايدة فتره عند كل نقطة: $(k \geq 1) ; x_k = 1 - \frac{1}{2^k}$ تساوي $\frac{1}{2^k}$ ، ثم أحسب:

$$\sum_{k=1}^{\infty} [f(x_k + 0) - f(x_k)]$$

لنكن المجموعة $A = \{1, 2, 3, \dots\}$ واركن الجبر التام $S = \mathcal{P}(A)$ ، وانضع

$$\mu(\phi) = 0, \mu(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{2^n}$$

ابع (٢٠ درجة): لنعرف الدالة f بالشكل: $f(x) = x^2 [1 - \varphi(x)] ; x \in [2, 5] = E$ ، حيث φ دالة ديريكليه على E ، والمطلوب:

الدالة $h(x) = 1 - \varphi(x)$ كمؤلة حسب سياتجيم بالتمية لدالة $g(x) = 2$ على الفترة $E = [2, 5]$ ، ولماذا؟
أن دالة ديريكليه تساوي الصفر تقريباً في كل مكان على الفترة E ،
من وجود التكامل $\int_E f(x) d\lambda$ ، ثم أحسب قيمته في حال وجوده.

انتهت الأسئلة

دروس المقرر

د. محمد عامر

مع تودياتي بالتوفيق والنجاح

٢٠١٠/١/١٨

$$g(x) = c + \int_a^x \varphi(t) dt \quad ; x \in [a, b]$$

بحيث أن التكامل $\int_a^x |\varphi(t)| dt$ موجود و محدود ، عندما أثبت أن g محدودة التغير على الفترة $[a, b]$.

(ب) اكتب الدالة $g(x) = \arcsin x$ على الفترة $[0, \sqrt{3}]$ كما يلي الطالب الأول ثم بين أن

التكامل $\int_0^{\sqrt{3}} x^2 dg(x) = (S)$ موجود واحسبه عندئذٍ ، كما يطلب حساب $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2} dx$

(ت) إذا كانت $f(x) = 0$ على المجموعة E المقيدة ، فإن $\int_E f(x) d\lambda = 0$ بدون إثبات ، والمطلوب:

حل المكن صحيح بشكل عام ؟ وضح ذلك بمثال مع الحل.

السؤال الثاني (25 درجة):

(أ) لتكن الدالة h المعرفة على الفترة $[0, 1]$ بالشكل التالي:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & ; x = 0 \\ \frac{1}{x^\alpha} & ; 0 < x \leq 1 \end{cases} \quad ; 0 < \alpha < 1$$

والمطلوب: حل الدالة كمولة حسب مفهوم ليبينغ على الفترة $[0, 1]$ ، ثم احسبه في حال وجوده.

(ب) ماذا نقصد بـ: جبر بوريل ، مع ذكر طريقتين لتوليده - التقارب بالقياس لمتتالية دوال ، و ما هي العلاقة بينه وبين مفهوم التقارب تقريباً في كل مكان على مجموعة E ، و أيهما لا يؤدي إلى الآخر.

(ت) أثبت أن الدالة المميزة للمجموعة E المقيدة من المجموعة E المقيدة $(I_n(x))$ فيوسية على E (بعد كتابة صيغتها) ، و ما هي قيمة $I_n(x)$.

السؤال الثالث (25 درجة):

(أ) لتكن متتالية الدوال $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ المعرفة بالشكل $\psi_n(x) = xe^{-nx}$ على الفترة $[1, 3]$ ، و لتكن الدالة:

$$g(x) = \begin{cases} (x-2)^2 \sin \frac{1}{x-2} & ; x \neq 2 \\ 0 & ; x = 2 \end{cases}$$

والمطلوب: (1) إيجاد الدالة $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x) = \psi(x)$ على الفترة $[1, 3]$.

(2) بين (مع التعليل) فيما إذا كانت المساراة التالية صحيحة:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^3 \psi_n(x) dg(x) = \int_1^3 \psi(x) dg(x)$$

(ب) لتكن متتالية المجموعات $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ حيث $A_n = [0, \frac{n-1}{n}]$ والمطلوب:

(i) أوجد نهاية هذه المتتالية.

(ii) أثبت أن $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ مقيدة حسب ليبينغ ، ثم احسب قياس A ، بتعين مختلفتين.

انتهت الأسئلة

تمت في شهر ربيع الثاني 1431

مع تمنياتي لكم بالنجاح

شورس المفقود: د. محمد بن عامر

أ. د. [0, 1/2] ، 1/2 ، 1/3 ، 1/4 ، 1/5 ، 1/6 ، 1/7 ، 1/8 ، 1/9 ، 1/10 ، 1/11 ، 1/12 ، 1/13 ، 1/14 ، 1/15 ، 1/16 ، 1/17 ، 1/18 ، 1/19 ، 1/20 ، 1/21 ، 1/22 ، 1/23 ، 1/24 ، 1/25 ، 1/26 ، 1/27 ، 1/28 ، 1/29 ، 1/30 ، 1/31 ، 1/32 ، 1/33 ، 1/34 ، 1/35 ، 1/36 ، 1/37 ، 1/38 ، 1/39 ، 1/40 ، 1/41 ، 1/42 ، 1/43 ، 1/44 ، 1/45 ، 1/46 ، 1/47 ، 1/48 ، 1/49 ، 1/50 ، 1/51 ، 1/52 ، 1/53 ، 1/54 ، 1/55 ، 1/56 ، 1/57 ، 1/58 ، 1/59 ، 1/60 ، 1/61 ، 1/62 ، 1/63 ، 1/64 ، 1/65 ، 1/66 ، 1/67 ، 1/68 ، 1/69 ، 1/70 ، 1/71 ، 1/72 ، 1/73 ، 1/74 ، 1/75 ، 1/76 ، 1/77 ، 1/78 ، 1/79 ، 1/80 ، 1/81 ، 1/82 ، 1/83 ، 1/84 ، 1/85 ، 1/86 ، 1/87 ، 1/88 ، 1/89 ، 1/90 ، 1/91 ، 1/92 ، 1/93 ، 1/94 ، 1/95 ، 1/96 ، 1/97 ، 1/98 ، 1/99 ، 1/100 ، 1/101 ، 1/102 ، 1/103 ، 1/104 ، 1/105 ، 1/106 ، 1/107 ، 1/108 ، 1/109 ، 1/110 ، 1/111 ، 1/112 ، 1/113 ، 1/114 ، 1/115 ، 1/116 ، 1/117 ، 1/118 ، 1/119 ، 1/120 ، 1/121 ، 1/122 ، 1/123 ، 1/124 ، 1/125 ، 1/126 ، 1/127 ، 1/128 ، 1/129 ، 1/130 ، 1/131 ، 1/132 ، 1/133 ، 1/134 ، 1/135 ، 1/136 ، 1/137 ، 1/138 ، 1/139 ، 1/140 ، 1/141 ، 1/142 ، 1/143 ، 1/144 ، 1/145 ، 1/146 ، 1/147 ، 1/148 ، 1/149 ، 1/150 ، 1/151 ، 1/152 ، 1/153 ، 1/154 ، 1/155 ، 1/156 ، 1/157 ، 1/158 ، 1/159 ، 1/160 ، 1/161 ، 1/162 ، 1/163 ، 1/164 ، 1/165 ، 1/166 ، 1/167 ، 1/168 ، 1/169 ، 1/170 ، 1/171 ، 1/172 ، 1/173 ، 1/174 ، 1/175 ، 1/176 ، 1/177 ، 1/178 ، 1/179 ، 1/180 ، 1/181 ، 1/182 ، 1/183 ، 1/184 ، 1/185 ، 1/186 ، 1/187 ، 1/188 ، 1/189 ، 1/190 ، 1/191 ، 1/192 ، 1/193 ، 1/194 ، 1/195 ، 1/196 ، 1/197 ، 1/198 ، 1/199 ، 1/200 ، 1/201 ، 1/202 ، 1/203 ، 1/204 ، 1/205 ، 1/206 ، 1/207 ، 1/208 ، 1/209 ، 1/210 ، 1/211 ، 1/212 ، 1/213 ، 1/214 ، 1/215 ، 1/216 ، 1/217 ، 1/218 ، 1/219 ، 1/220 ، 1/221 ، 1/222 ، 1/223 ، 1/224 ، 1/225 ، 1/226 ، 1/227 ، 1/228 ، 1/229 ، 1/230 ، 1/231 ، 1/232 ، 1/233 ، 1/234 ، 1/235 ، 1/236 ، 1/237 ، 1/238 ، 1/239 ، 1/240 ، 1/241 ، 1/242 ، 1/243 ، 1/244 ، 1/245 ، 1/246 ، 1/247 ، 1/248 ، 1/249 ، 1/250 ، 1/251 ، 1/252 ، 1/253 ، 1/254 ، 1/255 ، 1/256 ، 1/257 ، 1/258 ، 1/259 ، 1/260 ، 1/261 ، 1/262 ، 1/263 ، 1/264 ، 1/265 ، 1/266 ، 1/267 ، 1/268 ، 1/269 ، 1/270 ، 1/271 ، 1/272 ، 1/273 ، 1/274 ، 1/275 ، 1/276 ، 1/277 ، 1/278 ، 1/279 ، 1/280 ، 1/281 ، 1/282 ، 1/283 ، 1/284 ، 1/285 ، 1/286 ، 1/287 ، 1/288 ، 1/289 ، 1/290 ، 1/291 ، 1/292 ، 1/293 ، 1/294 ، 1/295 ، 1/296 ، 1/297 ، 1/298 ، 1/299 ، 1/300 ، 1/301 ، 1/302 ، 1/303 ، 1/304 ، 1/305 ، 1/306 ، 1/307 ، 1/308 ، 1/309 ، 1/310 ، 1/311 ، 1/312 ، 1/313 ، 1/314 ، 1/315 ، 1/316 ، 1/317 ، 1/318 ، 1/319 ، 1/320 ، 1/321 ، 1/322 ، 1/323 ، 1/324 ، 1/325 ، 1/326 ، 1/327 ، 1/328 ، 1/329 ، 1/330 ، 1/331 ، 1/332 ، 1/333 ، 1/334 ، 1/335 ، 1/336 ، 1/337 ، 1/338 ، 1/339 ، 1/340 ، 1/341 ، 1/342 ، 1/343 ، 1/344 ، 1/345 ، 1/346 ، 1/347 ، 1/348 ، 1/349 ، 1/350 ، 1/351 ، 1/352 ، 1/353 ، 1/354 ، 1/355 ، 1/356 ، 1/357 ، 1/358 ، 1/359 ، 1/360 ، 1/361 ، 1/362 ، 1/363 ، 1/364 ، 1/365 ، 1/366 ، 1/367 ، 1/368 ، 1/369 ، 1/370 ، 1/371 ، 1/372 ، 1/373 ، 1/374 ، 1/375 ، 1/376 ، 1/377 ، 1/378 ، 1/379 ، 1/380 ، 1/381 ، 1/382 ، 1/383 ، 1/384 ، 1/385 ، 1/386 ، 1/387 ، 1/388 ، 1/389 ، 1/390 ، 1/391 ، 1/392 ، 1/393 ، 1/394 ، 1/395 ، 1/396 ، 1/397 ، 1/398 ، 1/399 ، 1/400 ، 1/401 ، 1/402 ، 1/403 ، 1/404 ، 1/405 ، 1/406 ، 1/407 ، 1/408 ، 1/409 ، 1/410 ، 1/411 ، 1/412 ، 1/413 ، 1/414 ، 1/415 ، 1/416 ، 1/417 ، 1/418 ، 1/419 ، 1/420 ، 1/421 ، 1/422 ، 1/423 ، 1/424 ، 1/425 ، 1/426 ، 1/427 ، 1/428 ، 1/429 ، 1/430 ، 1/431 ، 1/432 ، 1/433 ، 1/434 ، 1/435 ، 1/436 ، 1/437 ، 1/438 ، 1/439 ، 1/440 ، 1/441 ، 1/442 ، 1/443 ، 1/444 ، 1/445 ، 1/446 ، 1/447 ، 1/448 ، 1/449 ، 1/450 ، 1/451 ، 1/452 ، 1/453 ، 1/454 ، 1/455 ، 1/456 ، 1/457 ، 1/458 ، 1/459 ، 1/460 ، 1/461 ، 1/462 ، 1/463 ، 1/464 ، 1/465 ، 1/466 ، 1/467 ، 1/468 ، 1/469 ، 1/470 ، 1/471 ، 1/472 ، 1/473 ، 1/474 ، 1/475 ، 1/476 ، 1/477 ، 1/478 ، 1/479 ، 1/480 ، 1/481 ، 1/482 ، 1/483 ، 1/484 ، 1/485 ، 1/486 ، 1/487 ، 1/488 ، 1/489 ، 1/490 ، 1/491 ، 1/492 ، 1/493 ، 1/494 ، 1/495 ، 1/496 ، 1/497 ، 1/498 ، 1/499 ، 1/500 ، 1/501 ، 1/502 ، 1/503 ، 1/504 ، 1/505 ، 1/506 ، 1/507 ، 1/508 ، 1/509 ، 1/510 ، 1/511 ، 1/512 ، 1/513 ، 1/514 ، 1/515 ، 1/516 ، 1/517 ، 1/518 ، 1/519 ، 1/520 ، 1/521 ، 1/522 ، 1/523 ، 1/524 ، 1/525 ، 1/526 ، 1/527 ، 1/528 ، 1/529 ، 1/530 ، 1/531 ، 1/532 ، 1/533 ، 1/534 ، 1/535 ، 1/536 ، 1/537 ، 1/538 ، 1/539 ، 1/540 ، 1/541 ، 1/542 ، 1/543 ، 1/544 ، 1/545 ، 1/546 ، 1/547 ، 1/548 ، 1/549 ، 1/550 ، 1/551 ، 1/552 ، 1/553 ، 1/554 ، 1/555 ، 1/556 ، 1/557 ، 1/558 ، 1/559 ، 1/560 ، 1/561 ، 1/562 ، 1/563 ، 1/564 ، 1/565 ، 1/566 ، 1/567 ، 1/568 ، 1/569 ، 1/570 ، 1/571 ، 1/572 ، 1/573 ، 1/574 ، 1/575 ، 1/576 ، 1/577 ، 1/578 ، 1/579 ، 1/580 ، 1/581 ، 1/582 ، 1/583 ، 1/584 ، 1/585 ، 1/586 ، 1/587 ، 1/588 ، 1/589 ، 1/590 ، 1/591 ، 1/592 ، 1/593 ، 1/594 ، 1/595 ، 1/596 ، 1/597 ، 1/598 ، 1/599 ، 1/600 ، 1/601 ، 1/602 ، 1/603 ، 1/604 ، 1/605 ، 1/606 ، 1/607 ، 1/608 ، 1/609 ، 1/610 ، 1/611 ، 1/612 ، 1/613 ، 1/614 ، 1/615 ، 1/616 ، 1/617 ، 1/618 ، 1/619 ، 1/620 ، 1/621 ، 1/622 ، 1/623 ، 1/624 ، 1/625 ، 1/626 ، 1/627 ، 1/628 ، 1/629 ، 1/630 ، 1/631 ، 1/632 ، 1/633 ، 1/634 ، 1/635 ، 1/636 ، 1/637 ، 1/638 ، 1/639 ، 1/640 ، 1/641 ، 1/642 ، 1/643 ، 1/644 ، 1/645 ، 1/646 ، 1/647 ، 1/648 ، 1/649 ، 1/650 ، 1/651 ، 1/652 ، 1/653 ، 1/654 ، 1/655 ، 1/656 ، 1/657 ، 1/658 ، 1/659 ، 1/660 ، 1/661 ، 1/662 ، 1/663 ، 1/664 ، 1/665 ، 1/666 ، 1/667 ، 1/668 ، 1/669 ، 1/670 ، 1/671 ، 1/672 ، 1/673 ، 1/674 ، 1/675 ، 1/676 ، 1/677 ، 1/678 ، 1/679 ، 1/680 ، 1/681 ، 1/682 ، 1/683 ، 1/684 ، 1/685 ، 1/686 ، 1/687 ، 1/688 ، 1/689 ، 1/690 ، 1/691 ، 1/692 ، 1/693 ، 1/694 ، 1/695 ، 1/696 ، 1/697 ، 1/698 ، 1/699 ، 1/700 ، 1/701 ، 1/702 ، 1/703 ، 1/704 ، 1/705 ، 1/706 ، 1/707 ، 1/708 ، 1/709 ، 1/710 ، 1/711 ، 1/712 ، 1/713 ، 1/714 ، 1/715 ، 1/716 ، 1/717 ، 1/718 ، 1/719 ، 1/720 ، 1/721 ، 1/722 ، 1/723 ، 1/724 ، 1/725 ، 1/726 ، 1/727 ، 1/728 ، 1/729 ، 1/730 ، 1/731 ، 1/732 ، 1/733 ، 1/734 ، 1/735 ، 1/736 ، 1/737 ، 1/738 ، 1/739 ، 1/740 ، 1/741 ، 1/742 ، 1/743 ، 1/744 ، 1/745 ، 1/746 ، 1/747 ، 1/748 ، 1/749 ، 1/750 ، 1/751 ، 1/752 ، 1/753 ، 1/754 ، 1/755 ، 1/756 ، 1/757 ، 1/758 ، 1/759 ، 1/760 ، 1/761 ، 1/762 ، 1/763 ، 1/764 ، 1/765 ، 1/766 ، 1/767 ، 1/768 ، 1/769 ، 1/770 ، 1/771 ، 1/772 ، 1/773 ، 1/774 ، 1/775 ، 1/776 ، 1/777 ، 1/778 ، 1/779 ، 1/780 ، 1/781 ، 1/782 ، 1/783 ، 1/784 ، 1/785 ، 1/786 ، 1/787 ، 1/788 ، 1/789 ، 1/790 ، 1/791 ، 1/792 ، 1/793 ، 1/794 ، 1/795 ، 1/796 ، 1/797 ، 1/798 ، 1/799 ، 1/800 ، 1/801 ، 1/802 ، 1/803 ، 1/804 ، 1/805 ، 1/806 ، 1/807 ، 1/808 ، 1/809 ، 1/810 ، 1/811 ، 1/812 ، 1/813 ، 1/814 ، 1/815 ، 1/816 ، 1/817 ، 1/818 ، 1/819 ، 1/820 ، 1/821 ، 1/822 ، 1/823 ، 1/824 ، 1/825 ، 1/826 ، 1/827 ، 1/828 ، 1/829 ، 1/830 ، 1/831 ، 1/832 ، 1/833 ، 1/834 ، 1/835 ، 1/836 ، 1/837 ، 1/838 ، 1/839 ، 1/840 ، 1/841 ، 1/842 ، 1/843 ، 1/844 ، 1/845 ، 1/846 ، 1/847 ، 1/848 ، 1/849 ، 1/850 ، 1/851 ، 1/852 ، 1/853 ، 1/854 ، 1/855 ، 1/856 ، 1/857 ، 1/858 ، 1/859 ، 1/860 ، 1/861 ، 1/862 ، 1/863 ، 1/864 ، 1/865 ، 1/866 ، 1/867 ، 1/868 ، 1/869 ، 1/870 ، 1/871 ، 1/872 ، 1/873 ، 1/874 ، 1/875 ، 1/876 ، 1/877 ، 1/878 ، 1/879 ، 1/880 ، 1/881 ، 1/882 ، 1/883 ، 1/884 ، 1/885 ، 1/886 ، 1/887 ، 1/888 ، 1/889 ، 1/890 ، 1/891 ، 1/892 ، 1/893 ، 1/894 ، 1/895 ، 1/896 ، 1/897 ، 1/898 ، 1/899 ، 1/900 ، 1/901 ، 1/902 ، 1/903 ، 1/904 ، 1/905 ، 1/906 ، 1/907 ، 1/908 ، 1/909 ، 1/910 ، 1/911 ، 1/912 ، 1/913 ، 1/914 ، 1/915 ، 1/916 ، 1/917 ، 1/918 ، 1/919 ، 1/920 ، 1/921 ، 1/922 ، 1/923 ، 1/924 ، 1/925 ، 1/926 ، 1/927 ، 1/928 ، 1/929 ، 1/930 ، 1/931 ، 1/932 ، 1/933 ، 1/934 ، 1/935 ، 1/936 ، 1/937 ، 1/938 ، 1/939 ، 1/940 ، 1/941 ، 1/942 ، 1/943 ، 1/944 ، 1/945 ، 1/946 ، 1/947 ، 1/948 ، 1/949 ، 1/950 ، 1/951 ، 1/952 ، 1/953 ، 1/954 ، 1/955 ، 1/956 ، 1/957 ، 1/958 ، 1/959 ، 1/960 ، 1/961 ، 1/962 ، 1/963 ، 1/964 ، 1/965 ، 1/966 ، 1/967 ، 1/968 ، 1/969 ، 1/970 ، 1/971 ، 1/972 ، 1/973 ، 1/974 ، 1/975 ، 1/976 ، 1/977 ، 1/978 ، 1/979 ، 1/980 ، 1/981 ، 1/982 ، 1/983 ، 1/984 ، 1/985 ، 1/986 ، 1/987 ، 1/988 ، 1/989 ، 1/990 ، 1/991 ، 1/992 ، 1/993 ، 1/994 ، 1/995 ، 1/996 ، 1/997 ، 1/998 ، 1/999 ، 1/1000 ، 1/1001 ، 1/1002 ، 1/1003 ، 1/1004 ، 1/1005 ، 1/1006 ، 1/1007 ، 1/1008 ، 1/1009 ، 1/1010 ، 1/1011 ، 1/1012 ، 1/1013 ، 1/1014 ، 1/1015 ، 1/1016 ، 1/1017 ، 1/1018 ، 1/1019 ، 1/1020 ، 1/1021 ، 1/1022 ، 1/1023 ، 1/1024 ، 1/1025 ، 1/1026 ، 1/1027 ، 1/1028 ، 1/1029 ، 1/1030 ، 1/1031 ، 1/1032 ، 1/1033 ، 1/1034 ، 1/1035 ، 1/1036 ، 1/1037 ، 1/1038 ، 1/1039 ، 1/1040 ، 1/1041 ، 1/1042 ، 1/1043 ، 1/1044 ، 1/1045 ، 1/1046 ، 1/1047 ، 1/1048 ، 1/1049 ، 1/1050 ، 1/1051 ، 1/1052 ، 1/1053 ، 1/1054 ، 1/1055 ، 1/1056 ، 1/1057 ، 1/1058 ، 1/1059 ، 1/1060 ، 1/1061 ، 1/1062 ، 1/1063 ، 1/1064 ، 1/1065 ، 1/1066 ، 1/1067 ، 1/1068 ، 1/1069 ، 1/1070 ، 1/1071 ، 1/1072 ، 1/1073 ، 1/1074 ، 1/1075 ، 1/1076 ، 1/1077 ، 1/1078 ، 1/1079 ، 1/1080 ، 1/1081 ، 1/1082 ، 1/1083 ، 1/1084 ، 1/1085 ، 1/1086 ، 1/1087 ، 1/1088 ، 1/1089 ، 1/1090 ، 1/1091 ، 1/1092 ، 1/1093 ، 1/1094 ، 1/1095 ، 1/1096 ، 1/1097 ، 1/1098 ، 1/1099 ، 1/1100 ، 1/1101 ، 1/1102 ، 1/1103 ، 1/1104 ، 1/1105 ، 1/1106 ، 1/1107 ، 1/1108 ، 1/1109 ، 1/1110 ، 1/1111 ، 1/1112 ، 1/1113 ، 1/1114 ، 1/1115 ، 1/1116 ، 1/1117 ، 1/1118 ، 1/1119 ، 1/1120 ، 1/1121 ، 1/1122 ، 1/1123 ، 1/1124 ، 1/1125 ، 1/1126 ، 1/1127 ، 1/1128 ، 1/1129 ، 1/1130 ، 1/1131 ، 1/1132 ، 1/1133 ، 1/1134 ، 1/1135 ، 1/1136 ، 1/1137 ، 1/1138 ، 1/1139 ، 1/1140 ، 1/1141 ، 1/1142 ، 1/1143 ، 1/1144 ، 1/1145 ، 1/1146 ، 1/1147 ، 1/1148 ، 1/1149 ، 1/1150 ، 1/1151 ، 1/1152 ، 1/1153 ، 1/1154 ، 1/1155 ، 1/1156 ، 1/1157 ، 1/1158 ، 1/1159 ، 1/1160 ، 1/1161 ، 1/1162 ، 1/1163 ، 1/1164 ، 1/1165 ، 1/1166 ، 1/1167 ، 1/1168 ، 1/1169 ، 1/1170 ، 1/1171 ، 1/1172 ، 1/1173 ، 1/1174 ، 1/1175 ، 1/1176 ، 1/1177 ، 1/1178 ، 1/1179 ، 1/1180 ، 1/1181 ، 1/1182 ، 1/1183 ، 1/1184 ، 1/1185 ، 1/1186 ، 1/1187 ، 1/1188 ، 1/1189 ، 1/1190 ، 1/1191 ، 1/1192 ، 1/1193 ، 1/1194 ، 1/1195 ، 1/1196 ، 1/1197 ، 1/1198 ، 1/1199 ، 1/1200 ، 1/1201 ، 1/1202 ، 1/1203 ، 1/1204 ، 1/1205 ، 1/1206 ، 1/1207 ، 1/1208 ، 1/1209 ، 1/1210 ، 1/1211 ، 1/1212 ، 1/1213 ، 1/1214 ، 1/1215 ، 1/1216 ، 1/1217 ، 1/1218 ، 1/1219 ، 1/1220 ، 1/1221 ، 1/1222 ، 1/1223 ، 1/1224 ، 1/1225 ، 1/1226 ، 1/1227 ، 1/1228 ، 1/1229 ، 1/1230 ، 1/1231 ، 1/1232 ، 1/1233 ، 1/1234 ، 1/1235 ، 1/1236 ، 1/1237 ، 1/1238 ، 1/1239 ، 1/1240 ، 1/1241 ، 1/1242 ، 1/1243 ، 1/1244 ، 1/1245 ، 1/1246 ، 1/1247 ، 1/1248 ، 1/1249 ، 1/1250 ، 1/1251 ، 1/1252 ، 1/1253 ، 1/1254 ، 1/1255 ، 1/1256 ، 1/1257 ، 1/1258 ، 1/1259 ، 1/1260 ، 1/1261 ، 1/1262 ، 1/1263 ، 1/1264 ، 1/1265 ، 1/1266 ، 1/1267 ، 1/1268 ، 1/1269 ، 1/1270 ، 1/1271 ، 1/1272 ، 1/1273 ، 1/1274 ، 1/1275 ، 1/1276 ، 1/1277 ، 1/1278 ، 1/1279 ، 1/1280 ، 1/1281 ، 1/1282 ، 1/1283 ، 1/1284 ، 1/1285 ، 1/1286 ، 1/1287 ، 1/1288 ، 1/1289 ، 1/1290 ، 1/1291 ، 1/1292 ، 1/1293 ، 1/1294 ، 1/1295 ، 1/1296 ، 1/1297 ، 1/1298 ، 1/1299 ، 1/1300 ، 1/1301 ، 1/1302 ، 1/1303 ، 1/1304 ، 1/1305 ، 1/1306 ، 1/1307 ، 1/1308 ، 1/1309 ، 1/1310 ، 1/1311 ، 1/1312 ، 1/1313 ، 1/1314 ، 1/1315 ، 1/1316 ، 1/1317 ، 1/1318 ، 1/1319 ، 1/1320 ، 1/1321 ، 1/1322 ، 1/1323 ، 1/1324 ، 1/1325 ، 1/1326 ، 1/1327 ، 1/1328 ، 1/1329 ، 1/1330 ، 1/1331 ، 1/1332 ، 1/1333 ، 1/1334 ، 1/1335 ، 1/1336 ، 1/1337 ، 1/1338 ، 1/1339 ، 1/1340 ، 1/1341 ، 1/1342 ، 1/1343 ، 1/1344 ، 1/1345 ، 1/1346 ، 1/1347 ، 1/1348 ، 1/1349 ، 1/1350 ، 1/1351 ، 1/1352 ، 1/1353 ، 1/1354 ، 1/1355 ، 1/1356 ، 1/1357 ، 1/1358 ، 1/1359 ، 1/1360 ، 1/1361 ، 1/1362 ، 1/1363 ، 1/1364 ، 1/1365 ، 1/1366 ، 1/1367 ، 1/1368 ، 1/1369 ، 1/1370 ، 1/1371 ، 1/1372 ، 1/1373 ، 1/1374 ، 1/1375 ، 1/1376 ، 1/1377 ، 1/1378 ، 1/1379 ، 1/1380 ، 1/1381 ، 1/1382 ، 1/1383 ، 1/1384 ، 1/1385 ، 1/1386 ، 1/1387 ، 1/1388 ، 1/1389 ، 1/1390 ، 1/1391 ، 1/1392 ، 1/1393 ، 1/1394 ، 1/1395 ، 1/1396 ، 1/1397 ، 1/1398 ، 1/1399 ، 1/1400 ، 1/1401 ، 1/1402 ، 1/1403 ، 1/1404 ، 1/1405 ، 1/1406 ، 1/1407 ، 1/1408 ، 1/1409 ، 1/1410 ، 1/1411 ، 1/1412 ، 1/1413 ، 1/1414 ، 1/1415 ، 1/1416 ، 1/1417 ، 1/1418 ، 1/1419 ، 1/1420 ، 1/1421 ، 1/1422 ، 1/1423 ، 1/1424 ، 1/1425 ، 1/1426 ، 1/1427 ، 1/1428 ، 1/142

السؤال الأول (27 درجة) (أ) إذا كانت الدالة f تحقق شرط ليبنز على الفترة $[0, 0.5]$ ، ثابت أنها تكون

محدودة التغير على هذه الفترة، وما هو مقدارها على هذه الفترة؟

(ب) بين أن الدالة $f(x) = x - x^2$ تحقق شرط ليبنز على الفترة $[0, 2]$ ، وما يمكن أن تكون مستوية

مستوية وقوية على هذه الفترة؟ اشرح ذلك.

$$\int_C h(x) d\lambda = 0$$

والمطلوب:

(ت) إذا كانت الدالة $f(x) = 0$ على المجموعة G ، فإن

هل يمكن ذلك مستوي؟ اشرح ذلك بشكل من ذلك مع ذكر الحد.

$$J = (S) \int_C e^x d\lambda(x)$$

حيث

السؤال الثاني (33 درجة): (أ) اكتب قيمة التكامل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & : 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & : 1 < x \leq 4 \\ 2 & : 4 < x \leq 5 \end{cases}$$

بمسد التأكد من وجوده.

(ب) اثبت أن الدالة $f(x) = [x]$ قوية على الفترة $[0, 5]$ ، وما هي مجموعة نقاط انقطاعها على هذه

الفترة؟ وما هو قياسها؟ وما هي مستوية ثباتها على هذه الفترة؟ مع التعليل.

(ت) ليكن $X = \{1, 2, \dots, 6\}$ فضاء الاحداث الابتدائية (مجموعة النتائج) لتجربة عشوائية، فمن أجل حدث

$A = \{1\} \subset X$ ، لتأخذ الحذف $T = \{\emptyset, A, X\}$ ، اثبت فيما إذا كان هذا الحذف يشكل حراً.

حراً تاماً؟ وماذا يسمى هذا النوع من الحذف في حالة الإحداث؟ اشرح ذلك.

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n} + \frac{1}{7} \right]$$

السؤال الثالث (20 درجة): (أ) أثبت أن المجموعة E متباعدة، وما هو

$$f(x) = \cos(x) - G$$

حيث $G = \cos(x)$ و f دالة.

قياسية؟ ثم تأكد من وجود التكامل:

(ب) - ماذا نعني بالتقارب بالقياس المتتالية دوال ما، وما هي العلاقة بين التقارب بالقياس والتقارب

تقريباً في كل مكان على مجموعة ما، ولتكن E .

$$B_n = \left[0, \frac{n-3}{n} \right]$$

- لتكن لدينا المتتالية B_n ، أوجد نهايتها، وما هو قياسها حسب مفهوم لينين.

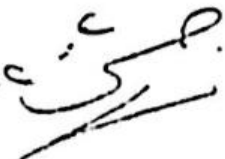
انتهت الأسئلة

حسب في 9 / 2010

مع تمنياتي لكم بالتوفيق

مدرس المقرر : د. محمد عامر





السؤال الأول (30 درجة):

(أ) أثبت أنه إذا كان للدالة f مشتق موجب محدود على الفترة $[a, b]$ ، فإنها تكون محدودة التغير على هذه الفترة.
و هل هي كمولة حسب ليبغ على هذه الفترة؟ وضع ذلك.

(ب) إذا كانت $\mu^*(E) = 0$ ، فاثبت أن (E) مجموعة مقبسة بالنسبة لـ μ^* (حيث μ^* قياس خارجي على X غير خالية).

(ت) لتكن الدالة:
$$\varphi(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{2x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$
 على الفترة $[0, 1]$.

بين أن هذه الدالة ليست محدودة التغير على هذه الفترة، وهل هي مستمرة مطلقاً و لدرجة على تلك الفترة؟ ولماذا؟
السؤال الثاني (25 درجة):

(أ) أثبت أن الدالة
$$h(x) = \begin{cases} 0 & ; x = 0 \\ \frac{1}{x^2} & ; x \neq 0 \end{cases}$$
 قبوسة على الفترة $[-1, 1]$ باستخدام التعريف.

(ب) احسب قيمة التكامل التالي
$$J = (S) \int_{-1}^1 x^2 \cos(x) dx$$
 حيث

$$g(x) = \begin{cases} 2x & ; -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & ; 0 < x \leq 2 \\ 1-x & ; 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

بعد التأكد من وجوده على هذه الفترة.

السؤال الثالث (25 درجة): (أ) ليكن S جبراً تاماً على مجموعة X غير خالية، و ليكن μ قياساً على S بحيث أن: $A \in S$ ، $0 < \mu(A) < \infty$ ، و لنضع من أجل المجموعة المشبعة $A \in S$ المسارة: $B \in S$ ، $\delta(B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)}$ بين فيما إذا كانت δ قياساً على S ، و إن كان إيجاباً،

فيل هو σ -منته؟ مع التعليل. (ب) إذا كانت G مجموعة مقبسة على الفترة $[a, b]$ ، فتأكد من وجود

التكامل $I = (L) \int_a^b f_G(x) dx$ حسب ليبغ، ثم احسب قيمة التكامل، حيث f_G هي الدالة المعينة

المجموعة G .

حفظ في 22 / 9 / 2010

مقرر المقرر: د. محمد عامر

مقرر المقرر

مقرر المقرر